Στοιχεία Ολικής Διαφορικής Γεωμετρίας (624)

Συγγράμματα: Δ. Κουτρουφιώτη, Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία
B. O'Neil, —"— —"— —"—
A. Pressley, —"— —"— —"—

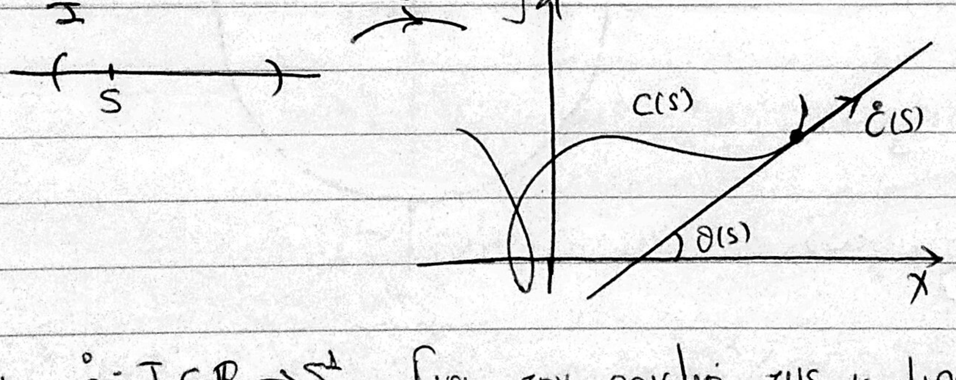
M. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces.

Διαφορική Γεωμετρία.

Τοπική διαφορ. Γεωμετρ. ← → Ολική διαφ. Γεωμετρ.

ΟΛΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$



$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = \vec{t}(s)$

$\|\dot{c}(s)\| = 1 \Leftrightarrow$

$\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1.$

Έτσι, $\dot{c}: I \subset \mathbb{R} \to S^1$. Για τον ορισμό της καμπυλότητας θα μας βοηθήσει το επόμενο λήμμα:

Λήμμα: Έστωσαν $a, b: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $a^2(t) + b^2(t) = 1, \forall t \in I$
Αν a,b είναι C^1 συναρτήσεις τότε $\forall \phi_0 \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδική γωνιακή συνάρτηση $\phi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$\begin{cases} a(t) = \cos\phi(t), \quad b(t) = \sin\phi(t) \\ \phi(t_0) = \phi_0, \quad t_0 \in I \end{cases}$$

Λήμμα: Έστω $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ καμπύλη C^1 με παράμετρο το μήκος τόξου $s\in I$ και $c(s)=(x(s),y(s))$

(i) Υπάρχει συνάρτηση $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$:
$$\dot{c}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s))=(\cos\phi(s),\sin\phi(s))$$

(ii) Αν $\phi,\tilde{\phi}:[a,b]\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις όπως στο (i) τότε
$$\exists m\in\mathbb{Z}:\ \tilde{\phi}(s)=\phi(s)+2\pi m\ ,\ \forall s\in[a,b]$$

(iii) Η διαφορά $\phi(b)-\phi(a)$ είναι ανεξάρτητη της γωνιακής συνάρτησης ϕ (και καλείται μεταβολή της γωνίας)

(iv) Για $s_0\in[a,b]$, $\phi_0\in\mathbb{R}$, $\exists!\ \phi$ τω $\phi(s_0)=\phi_0$

Απόδειξη:

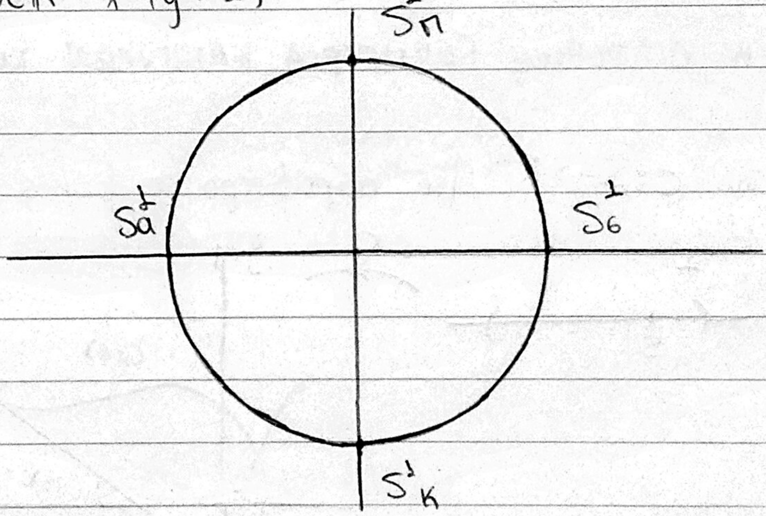
(i) $c:[a,b]\to S^1:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$

$S^1_\delta:=\{(x,y)\in S^1: x>0\}$

$S^1_\alpha:=\{(x,y)\in S^1: x<0\}$

$S^1_\pi:=\{(x,y)\in S^1: y>0\}$

$S^1_\kappa:=\{(x,y)\in S^1: y<0\}$



Τότε $S^1=S^1_\delta\cup S^1_\alpha\cup S^1_\pi\cup S^1_\kappa$

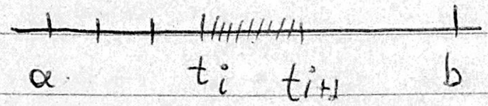
(I) Αν πχ $\dot{c}([a,b])\subset S^1_\delta$, τότε $\phi(s)=\arctan\left(\frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}\right)$

ομοίως αν $\dot{c}([a,b])\subset S^1_\alpha$ ή S^1_π ή S^1_κ

(II) Υποθέτω ότι δεν ισχύει ο (I)

Η $\dot{c}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ είναι συνεχής και ορισμένη σε συμπαγές $[a,b]\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Η $\dot{c}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

δηλαδή: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0): \forall s_1,s_2 \in [a,b]$ με $|s_1-s_2|<\delta \Rightarrow d(\dot{c}(s_1),\dot{c}(s_2))<\varepsilon$



$\Rightarrow \exists$ διαμέριση $\{a=t_0<t_1<\dots<t_k=b\}$ του $[a,b]$ ώστε κάθε $\dot{c}([t_i,t_{i+1}])$ βρίσκεται σε ένα από τα $S^1_\sigma, S^1_\alpha, S^1_\pi, S^1_\kappa$

Έστω $\dot{c}([t_0,t_1]) \subset S^1_\sigma$, ορίζω $\phi_1: [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ ώστε
$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$

$\dot{c}([t_1,t_2]) \subset S^1_\alpha$, ορίζω $\phi_2: [t_1,t_2] \to \mathbb{R}$ ώστε
$\phi_2(t_1) = \phi_1(t_1)$

τότε

$$\phi(t) := \begin{cases} \phi_1(t), & t_0 \le t \le t_1 \\ \phi_2(t), & t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

(ii) Έστω $\phi, \tilde{\phi}: [a,b] \to \mathbb{R}$ γωνιακές συναρτήσεις όπως στο (i)

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s),\dot{y}(s)) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s)) = (\cos\tilde{\phi}(s), \sin\tilde{\phi}(s))$, $\forall s \in [a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\tilde{\phi}(s) = \cos\phi(s) \\ \sin\tilde{\phi}(s) = \sin\phi(s) \end{cases}, \forall s \in [a,b] \Rightarrow \exists m(s) \in \mathbb{Z}: \tilde{\phi}(s) = \phi(s) + 2\pi m(s) \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(s) = \dfrac{\tilde{\phi}(s)-\phi(s)}{2\pi}$, $m: [a,b] \to \mathbb{Z}$ συνεχής $\rightarrow m(s) =$ σταθ. ανεξάρτητο του s.

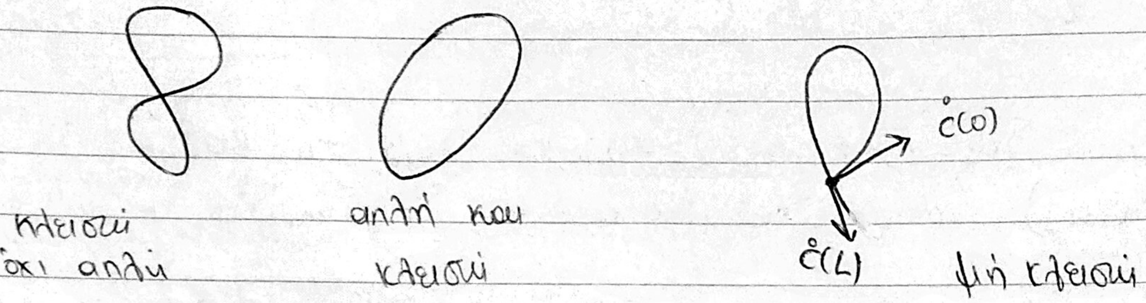
$\boxed{\tilde{\phi}(s) = \phi(s) + 2m\pi}$, $m \in \mathbb{Z}$

(iii) Θυσδο $\phi(b)-\phi(a) = \tilde{\phi}(b)-\tilde{\phi}(a)$

$\tilde{\phi}(b)-\tilde{\phi}(a) = (\phi(b)+2\pi m)-(\phi(a)+2\pi m) = \phi(b)+2\pi m-\phi(a)-2\pi m = \phi(b)-\phi(a)$

$\rightarrow$

Ορισμός: Μια καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ καλείται <u>κλειστή</u> <u>ανν</u> είναι περιοδική, δηλαδή $\exists L>0 : c(L+s)=c(s),\ \dot{c}(s+L)=\dot{c}(s), \dots$



$$L=\int_0^L \|\dot{c}(s)\|ds = \text{μήκος} = L_0^L(c)$$

Ορισμός: Μια κλειστή καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με περίοδο L καλείται <u>απλή</u> <u>ανν</u> $c\big|_{[0,L)}$ είναι 1-1

ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ ΓΙΑ ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Ορισμός: Έστω $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ κλειστή καμπύλη με περίοδο $L>0$. Καλούμε δείκτη στροφής της c τον αριθμό

$$n_c := \frac{\phi(L)-\phi(0)}{2\pi}$$

, όπου $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τυχούσα γωνιακή συνάρτηση του $\dot{c}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s))=(\cos\phi(s),\sin\phi(s))$

! **Παρατήρηση:** $\dot{c}(s+L)=\dot{c}(s),\ \forall s \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos\phi(s+L),\sin\phi(s+L))=(\cos\phi(s),\sin\phi(s))\quad \forall s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\phi(s+L)=\cos\phi(s) \\ \cos\phi(s+L)=\sin\phi(s) \end{cases},\ \forall s\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lambda(s)\in\mathbb{Z} : \phi(s+L)=\phi(s)+2\pi\lambda(s) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda(s) = \dfrac{\phi(s+L) - \phi(s)}{2\pi}$, Άρα η $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ είναι συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(s)$ ανεξάρτητη του s.

! <u>Παρατήρηση</u>: Για κλειστές καμπύλες με περίοδο $L>0$ ισχύει:

$$\phi(s+L) = \phi(s) + 2\pi\lambda \, , \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

Δηλαδή $\quad n_c = \dfrac{\phi(L) - \phi(0)}{2\pi} = \dfrac{2\lambda\pi}{2\pi} = \lambda$

Δηλαδή

$$\boxed{\phi(s+L) = \phi(s) + 2\pi n_c \, , \quad \forall s}$$

Πχ// Θεωρώ τον κύκλο κέντρου $O=(0,0)$ και ακτίνα $r>0$ με παραμετρική παράσταση $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$

$$c'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \quad , \|c'(t)\| = r > 0$$

Κάνω αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$, δηλαδή

$$s = s(t) = \int_0^t \|c'(u)\| du = \int_0^t r du = tr \iff s = r \cdot t \iff t = s/r$$

Άρα η αναπαραμέτρηση είναι $c(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

ξέρω ότι $L = 2\pi r$

$$c(s+L) = \left(r\cos\left(\frac{s+L}{r}\right), r\sin\left(\frac{s+L}{r}\right)\right) = \left(r\cos\left(\frac{s+2\pi r}{r}\right), r\sin\left(\frac{s+2\pi r}{r}\right)\right) =$$

$$= \left(r\cos\left(\frac{s}{r} + 2\pi\right), r\sin\left(\frac{s}{r} + 2\pi\right)\right) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) = c(s)$$

Ομοίως $\quad \mathring{c}(s+L) = \mathring{c}(s)$

$$\mathring{c}(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$\longrightarrow$

Άρα η γωνιακή συνάρτηση $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της

$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$, $\forall s\in\mathbb{R}$ είναι η $\phi(s) = \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}$.

Ο αριθμός περιστροφής (δείκτης στροφής) του κύκλου είναι:

$$n_c = \frac{\phi(L)-\phi(0)}{2\pi} = \frac{\frac{L}{r}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{\frac{2\pi r}{r}}{2\pi} = 1$$

[Άσκηση: Να γίνει το ίδιο και για την έλλειψη]

Παρατήρηση: Η καμπυλότητα της c είναι η συνάρτηση $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$k = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$$

θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού

$$n_c = \frac{\phi(L)-\phi(0)}{2\pi} \overset{\text{ΘΘ ΑΛ}}{=} \frac{\phi\big|_0^L}{2\pi} = \frac{\int_0^L \dot{\phi}(s)ds}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^L k(s)ds$$

Συμπέρασμα. Για κλειστές καμπύλες μήκους $L>0$ ισχύει:

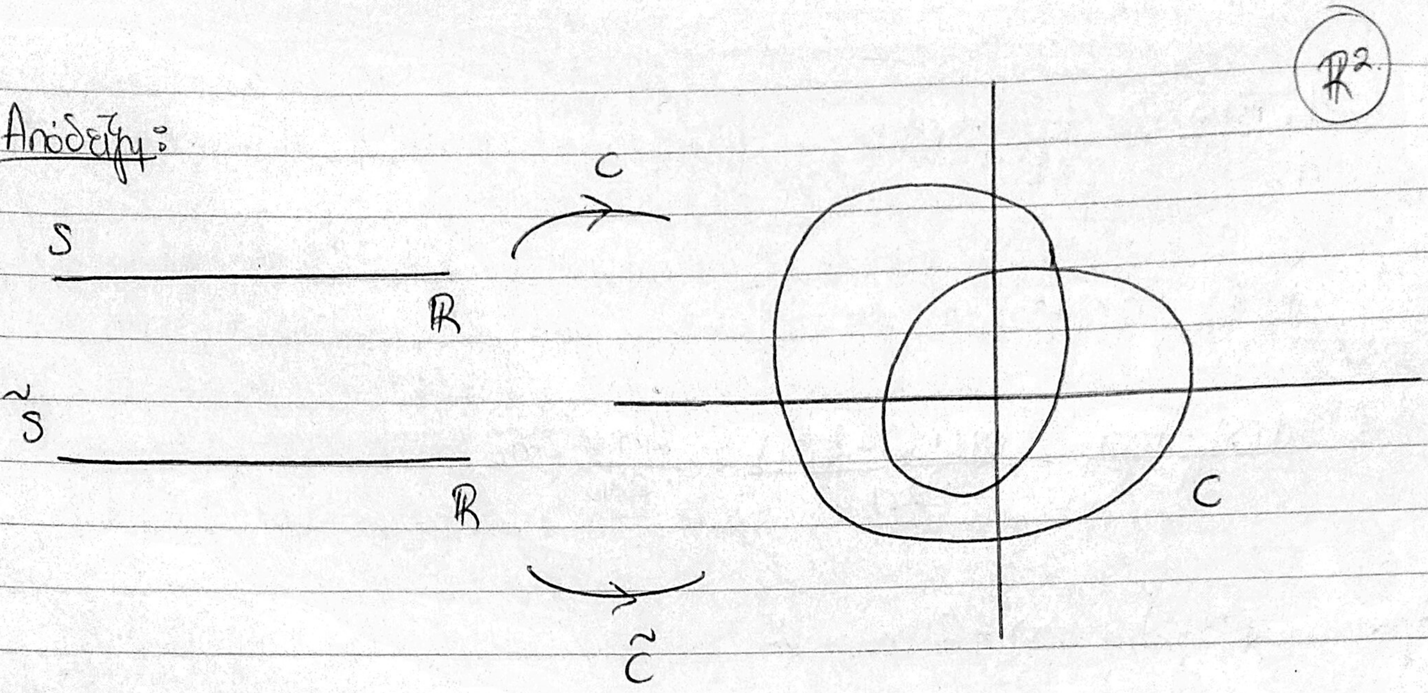
$$\boxed{\int_0^L k(s)ds = 2\pi n_c.}$$

Πρόταση: Έστω $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ κλειστή καμπύλη μήκους L με παράμετρο το μήκος τόξου και $\tilde{c}$: αναπαραμέτρηση της c με παράμετρο το μήκος τόξου, τότε ισχύουν:

(i) $n_{\tilde{c}} = n_c$, αν η αναπαραμέτρηση διατηρεί την φορά διαγραφής (προσανατολισμό) της καμπύλης.

(ii) $n_{\tilde{c}} = -n_c$, αν η αναπαραμέτρηση αντιστρέφει την φορά διαγραφής της καμπύλης.

Απόδειξη:



$\tilde{c} = c \circ f \;,\; f(\tilde{s}) = s$

$$\left\| \frac{dc}{ds} \right\| = 1 \;,\; \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{s}} \right\| = 1.$$

$$\frac{d\tilde{c}}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}} \cdot \frac{dc}{ds} = \frac{df}{d\tilde{s}} \cdot \frac{dc}{ds} \Rightarrow \left| \frac{df}{d\tilde{s}} \right| = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{df}{d\tilde{s}} = 1$ παντού ή $\frac{df}{d\tilde{s}} = -1$ παντού $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (I) $\tilde{s} = s +$ σταθ ή (II) $\tilde{s} = -s +$ σταθ.

$$n_c = \frac{\phi(L) - \phi(0)}{2\pi} \;,\; \frac{dc(s)}{ds} = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$$

$$n_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{\phi}(L) - \tilde{\phi}(0)}{2\pi} \;,\; \frac{d\tilde{c}(\tilde{s})}{d\tilde{s}} = (\cos\tilde{\phi}(\tilde{s}), \sin\tilde{\phi}(\tilde{s}))$$

Έστω ότι ισχύει το (I) $\tilde{s} = s + s_0$

$\tilde{c}(\tilde{s}) = c(s + s_0)$ $\longrightarrow$

$$\frac{d\tilde{c}}{d\tilde{s}}(\tilde{s}) = \frac{dc}{ds}(s+s_0)$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{s}) = \phi(s+s_0)$$

$$\frac{\tilde{\phi}(s)-\tilde{\phi}(0)}{2\pi} = \frac{\phi(L+s_0)-\phi(s_0)}{2\pi} = \frac{2\pi n_c}{2\pi} = n_c$$

Άρα $\phi(s+L) = \phi(s) + 2\pi n_c$, $\forall s$

ή

$\phi(-s_0+L) = \phi(-s_0) + 2\pi n_c$.

<u>Θεώρημα Στρεφόμενης Εφαπτομένης:</u>

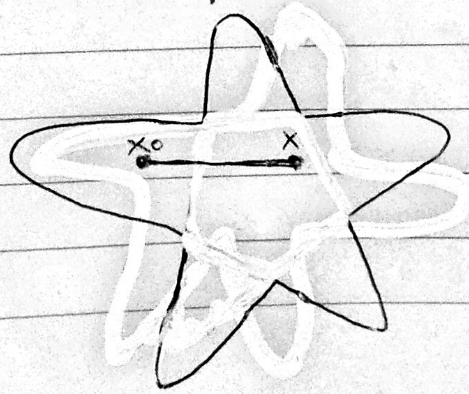
Ο δείκτης στροφής κάθε απλής κλειστής καμπύλης είναι ± 1.

Γενίκευση του λήμματος για συνεχείς απεικονίσεις $F: A \subset \mathbb{R}^n \to S^1$, δηλαδή $F(x) = (u(x), v(x))$, $x \in A$.

$\Rightarrow$ $\exists$ συνεχής συνάρτηση $\phi: A \to \mathbb{R}$ τω $F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x))$

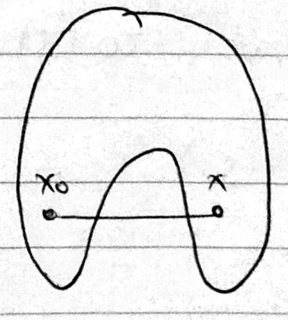
- Για $n=1$, $A = [a,b]$
- Για $n \geq 2$, $A =$ αστερόμορφο σύνολο

<u>Ορισμός:</u> Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται αστερόμορφο ή αστερόσχημο <u>αν</u> $\exists x_0 \in A$: $\forall x \in A$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x_0, x περιέχεται στο A.



αστερόμορφο

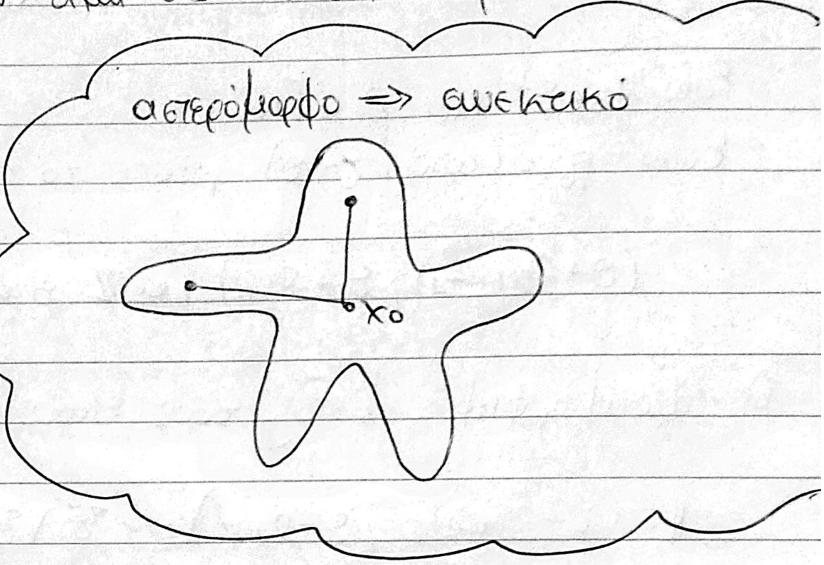
μη-αστερόμορφο



Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x_0, x είναι το $\{(1-t)x_0 + tx : t\in[0,1]\}$

Λήμμα: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ αστερόμορφο σύνολο και $F: A\subseteq\mathbb{R}^n \to S^1$: $F(x) = (u(x), v(x))$ συνεχής απεικόνιση. Τότε $\exists$ συνεχής συνάρτηση $\phi: A\to\mathbb{R}$ με $F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x))$

$\circledast$ $(\exists!\ \phi)$ αν καθορίσαμε την τιμή της σε ένα σημείο



Απόδειξη:

- Για $n=1$, $A=[a,b]$ ισχύει
- Για $n\geq 2$.

Θεωρώ τυχόν $x\in A$ και ορίζω την απεικόνιση

$e_x:[0,1]\to S^1$ με

$e_x(t) = F((1-t)x_0+tx)$ συνεχής

Άρα $\exists$ συνεχής συνάρτηση $\phi_x:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$e_x(t) = (\cos\phi_x(t), \sin\phi_x(t))$, $\forall t\in[0,1]$

Παρατηρώ ότι $e_x(1) = (\cos\phi_x(1), \sin\phi_x(1))$

Ορίζω την συνάρτηση $\phi: A\to\mathbb{R}$ με $\phi(x) := \phi_x(1)$, τότε ισχύει ότι:

$F(x) = (\cos\phi(x), \sin\phi(x))$

Αρκεί νδο η $\phi: A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Για $x,y\in A$: $|\phi(x)-\phi(y)| = |\phi_x(1)-\phi_y(1)|$

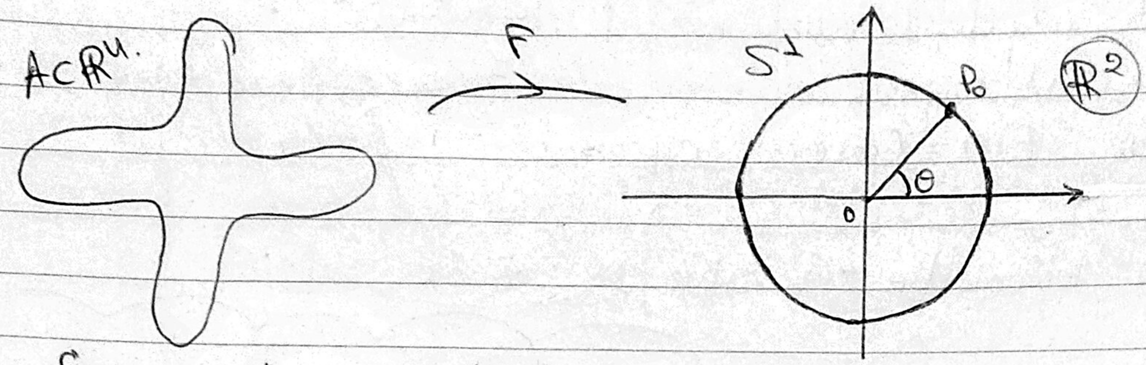
$\forall x$, έχω διαμέριση $\{t_0=0<t_1<\dots<t_k=1\}$ με κάθε

$e_x([t_i,t_{i+1}])\subset S^1_\epsilon$ ή S^1_α ή S^1_π ή S^1_κ για $y\sim x$ (y κοντά στο x)

$\phi_x(1) = \arctan\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)$ και $\phi_y(1) = \arctan\left(\frac{v(y)}{u(y)}\right)$

$|\phi_x(1)-\phi_y(1)| = \left|\arctan\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right) - \arctan\left(\frac{v(y)}{u(y)}\right)\right| < \varepsilon.$

Παρατήρηση: Έστω $F: A \subset \mathbb{R}^n \to S^1$ συνεχής με $F(x) = (u(x), v(x))$, $x \in A$, A αστερόμορφο. Υποθέτω ότι η F δεν είναι επί



Έστω $p_0 \in S^1$ και $p_0 \notin F(A)$

Έστω $p_0 = (\cos\theta, \sin\theta)$, τότε το σύνολο $S^1 \setminus \{p_0\}$ και το

$(\theta + 2\pi(k-1), \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικά

Ο ομοιομορφισμός μεταξύ τους είναι η:

$\psi : (\theta + 2(k-1)\pi, \theta + 2k\pi) \to S^1 \setminus \{p_0\}$

$\psi(t) = (\cos t, \sin t)$

$\psi^{-1} : S^1 \setminus \{p_0\} \to (\theta + 2(k-1)\pi, \theta + 2k\pi)$

Ορίζω την $\phi : A \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = \psi^{-1}(F(x))$ άρα $\boxed{\phi = \psi^{-1} \circ F}$

(αρκεί και θέλω η εικόνα να μην είναι ολόκληρος ο μοναδιαίος κύκλος)